数理解析研究所講究録
第 1699 巻 2010 年 44-61

Some New Applications of Zalcman's Lemma to Complex Dynamics

川平 友規 (Tomoki Kawahira)
名古屋大学・多元数理科学研究科 (Nagoya University)

概 要

Zalcman の補題とは，複素平面上の領域で定義された関数族が正規族とならない必要十分条件を与えるものである．本講では，その複素力学系への応用をいくつか紹介したい：

- Julia 集合内で反発的周期点が稠密であることの証明
- Mandelbrot 集合と Julia 集合の類似性
- Lyubich-Minsky ラミネーションの構成
- Lyubich-Minsky の意味での錘点 (conical point) と，Martin-Mayer の意味での錘点の統一的解釈

1 Zalcman の補題

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域とし，$\mathcal{F}$ を D 上で定義された正則関数族とする．Zalcman の補題は，このような関数族の非正規性に対し必要十分条件を与える：

□ **補題 1.1** (Zalcman の補題 [Za]) 関数族 $\mathcal{F}$ がある $z_0 \in D$ で正規族をなさないことは，次と必要十分である：任意の列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対し，$n_k \to \infty$ を満たす列 $n_k \in \mathbb{N}$，$\rho_k \to 0$ を満たす列 $\rho_k \in \mathbb{C}^*$，および $z_k \to z_0$ を満たす列 $z_k \in D$ が存在して，関数 $\psi_k(w) = F_{n_k}(z_k + \rho_k w)$ が定数でない有理形関数 $\psi : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する． □

ここで，実際は $\rho_k > 0$ とできるのだが，後の応用に備えて複素数のままにしておくことにする．

このノートは研究集会『複素力学系とその関連分野の総合的研究』(2009/12/14—18，京都大学人間・環境学研究科)，および第 52 回関数論シンポジウム (2009/11/21—23，大阪市立大学・理学研究科) における講演内容に関してまとめたものです．この研究は住友財団からの研究奨励金および日本学術振興会からの科学技術研究費により補助をうけています．

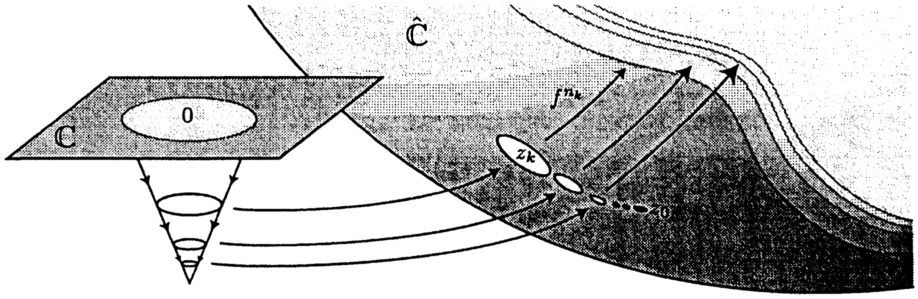

図 1: Zalcman の補題を $\mathcal{F} = \{f^n\}$ （f は有理関数）に適用したイメージ図.

実はこの補題，複素力学系理論にたいへん「しっくり」くる形をしている．本稿では次数 2 以上の有理写像 $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ をひとつ固定し，これによって生成される力学系

$$\cdots \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \cdots$$

を複素力学系と呼ぶことにしよう．そのカオス部分は一般に

$$J_f := \left\{ z_0 \in \overline{\mathbb{C}} : \ z_0 \text{ の任意の近傍 } U \text{ 上で } \{f^n|U\} \text{ は正規族でない} \right\}$$

と定義され，これを f の **Julia 集合**と呼ぶ. [1]（ただし，f^n は f を n 回合成したもの.）いま，上の補題で $\mathcal{F} := \{f^n\}_{n \geq 0}$ とすれば，Julia 集合上の点を特徴づける必要十分条件を得たことになる.

Zalcman の補題自体は 70 年代中頃のものである．まもなくして複素力学系の現代的理論が Douady，Hubbard，Sullivan らによって切り開かれたわけだが，この補題が複素力学系に応用されるまでにはちょっとしたディレイがあった．複素力学系の研究者がこの補題を認知するようになったのは，おそらく 90 年代半ば，Schwick が Julia と Fatou による古典的結果である「Julia 集合における反発的周期点の稠密性」の別証明にこの補題を適用してからであろう．しかしその後の応用も散発的で，Schwick の証明を改良した Bargmann [Ba]，Berteloot-Duval[BD]，補題から生成される有理形関数の値分布的性質について調べた Steinmetz の [St], 力学系の剛性に応用した Astala-Haïssinsky の [Ha], Martin-Mayer の [MM] ぐらいであろうか.

実のところ,「リスケーリング原理」とも呼ばれる当補題の原理的な部分は，すでに多くの複素力学系研究者にとって共通の知識だったようにも見える．あえてこの補題の形に合わせなくても，別な書き方で事足りるではないか，と.（たとえば McMullen の本 [Mc1] では Zalcman の補題そのものが暗に使われている.）

本稿では，上で述べた Schwick の結果をひとつの足がかりとしながら，Zalcman の補題の新しい応用について記したいとおもう．はたして，Zalcman の補題は単なるオルタナティヴに過ぎないのだろうか．それとも，なにか新しい情報をもたらしてくれるのか.

---

[1] $\overline{\mathbb{C}}$ はコンパクトなので,「正規族でない」は「同程度連続でない」と置き換えられる.

記号．以下 $\mathbb{N}$ は非負整数の集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ を表すこととする．また，$\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}-\{0\}$ とする．

2 Julia集合における反発的周期点の稠密性について

Zalcmanの補題を複素力学系に応用したのは，おそらく Scwhick [Sch] が最初ではなかろうか．本章ではその結果および証明の概要をのべ，Bargmann，Berteloot-Duval らによる改良版も紹介したい．

2.1 反発的周期点

周期点とは，方程式 $f^n(z) = z$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ の解のことである．ある周期点 z に対し，$f^n(z) = z$ となる n の最小値 p をその周期と呼ぶ．また，そこでの微分係数 $(f^p)'(z)$ を乗数 (multiplier) と呼ぶことにする．乗数の絶対値が1より大きいとき，その周期点は反発的周期点 (repelling periodic point) とよばれる．z の十分小さな近傍は f^p の作用で $|(f^p)'(z)|$ 程度拡大され，自分自身を覆うわけである．このような拡大的な作用のため，関数族 $\{f^n\}$ は z の近傍で正規族となれない．すなわち，$z \in J_f$ である．

さてこの章で扱うのは，次の古典的な定理（1910年代）である：

□ **定理 2.1 (Fatou, Julia)** 反発的周期点全体の集合は J_f の中で稠密である． □

Fatou と Julia の証明はそれぞれ異なっているが（Milnor の教科書 [Mi] をみよ），どちらも有理関数特有の性質を用いており，たとえば整関数や有理形関数による力学系でそのまま通用するような議論ではない．その点，次の Schwick [Sch] による証明は，若干の変更で整関数や有理形関数の力学系にも適用できる．([UTM, 定理 2.25] も参照せよ．)

■ **証明 (Schwick)** まず定理を $\deg f \geq 5$ の場合に帰着させよう．Julia 集合の定義からさほど遠くない事実として，任意の $n \geq 1$ について J_f と J_{f^n} は一致することが知られている．f の周期点は f^n の周期点でもあるから，f を f^3 に置き換えて定理を証明すればよい．

次に，$E = \{\infty, f(\infty), f(c_1), \ldots, f(c_N)\}$ という有限集合を考える．ただし，c_i は f の分岐点（$f'(c_i) = 0$ となる点）である．Julia 集合は孤立点を持たないことが知られているので（たとえば [Mi, §4]），以下，任意に $z_0 \in J_f - E$ を固定し，反発的周期点の列 ζ_k が存在して，$k \to \infty$ のとき $\zeta_k \to z_0$ とできることを示そう．

Zalcman の補題を $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n\geq 0}$ に適用して，収束する関数族 $\psi_k(w) = f^{n_k}(z_k + \rho_k w) \to \psi(w)$ を得る．ただし，収束は $\mathbb{C}$ 内のコンパクト集合上で一様であり，極限 ψ は定数でない有理形関数である．

いま，$z_0 \notin E$ であったから，少なくとも5つの点 $p_1, \ldots, p_5$ で $f(p_i) = z_0$ を満たすものが存在する．さらに Nevanlinna の全分岐値 (totally ramilied values) に関する定理から，ある $w_0 \in \mathbb{C}$ が存在して，$\psi'(w_0) \neq 0$ かつ $\psi(w_0) = p_i$ がある $i \in \{1, \ldots, 5\}$ について成り立つ．(たとえば [No, p. 18] をみよ.) ここで

$$f \circ f^{n_k}(z_k + \rho_k w) - (z_k + \rho_k w) \;\to\; f \circ \psi(w) - z_0 \;\; (k \to 0)$$

であるが，右の極限は $w = w_0$ のとき 0 である．よって Hurwitz の定理から，ある $w_k \to w_0$ が存在して

$$f \circ f^{n_k}(z_k + \rho_k w_k) \;=\; z_k + \rho_k w_k$$

を満たす． $\zeta_k := z_k + \rho_k w_k$ とおけば，とりあえず z_0 に収束する周期点の列は得られた．

あとは ζ_k が反発的であることを示さなくてはならない．$\lambda_k := (f^{n_k+1})'(\zeta_k)$ とおくと，実は

$$\rho_k \cdot \lambda_k \;=\; (f \circ \psi_k)'(w_k) \;\to\; (f \circ \psi)'(w_0) \;\neq\; 0 \;\; (k \to \infty)$$

が成り立つ．$\rho_k \to 0$ であったから，十分大きな k で ζ_k は反発的である． ■

「Nevanlinna の定理」を使うのがややマニアックだ，という方もあるかもしれない．この点を改良した証明が，Bargmann[Ba] および Berteloot-Duval[BD] により与えられている．ここでは教科書 [BM] にしたがって証明を与える：

■ 証明　(改)　こんどは $C := \bigcup_{f'(c_i)=0} \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(c_i)$ として，$z_0 \in J_f - C$ に補題を適用する．(C は可算集合だが，$z \in J_f$ の任意の近傍には J_f の点が非可算個存在する.) Picard の定理から，つぎの3点を満たす開集合 $U \subset \mathbb{C}$ が存在する：

$$(1)\ \psi(U) \cap J \neq \emptyset \qquad (2)\ \psi(U) \subset \mathbb{C} \qquad (3)\ \forall w \in U,\ \psi'(w) \neq 0.$$

(1) より $J_f \subset f^m(\psi(U))$ となるような $m \geq 0$ が存在することがわかるので（たとえば [Mi, §4]），ある $w_0 \in U$ について $f^m \circ \psi(w_0) = z_0$ が成り立つ．よって，上の証明と同様にして $w_k \to w_0$ で

$$f^m \circ f^{n_k}(z_k + \rho_k w_k) \;=\; z_k + \rho_k w_k$$

を満たすものが存在する．さらに $k \to \infty$ のとき

$$\rho_k \cdot (f^{m+n_k})'(z_k + \rho_k w_k) \;=\; (f^m)'(\psi_k(w_k)) \cdot \psi_k'(w_k) \;\to\; (f^m)'(\psi(w_0)) \cdot \psi'(w_0).$$

極限は $(f^m)'(z_0) \cdot \psi'(w_0)$ であるから，$z_0 \notin C$ および $w_0 \in U$ よりこの値は0でない．

■

ちなみに上で用いた Picard の定理や Montel の定理も，Zalcman の補題を用いた比較的簡単な証明が知られている．このあたりは [BD] に詳しい．

2.2 パラメータ空間への応用

実は上のような議論を，関数族のパラメーター空間にも適用できるので，簡単に紹介しよう．ただし，結果自体は新しいものではない．(以降の内容は [Ka] に基づく．)

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の単位円板を $\mathbb{D}$ であらわす．正則写像 $f:\mathbb{D}\times\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f:(t,z)\mapsto f_t(z)$ を考えよう．ただし，それぞれの $f_t:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ は次数 $d\geq 2$ の有理関数である．すなわち，f は $\mathbb{D}$ でパラメトライズされた有理関数の族，ということになる．．

アクティブ部分．以下，ある正則写像 $c:\mathbb{D}\to\overline{\mathbb{C}}$ が存在して，$c(t)=c_t$ が f_t の分岐点となっていると仮定する．ペア (f,c) から得られる分岐点 c_t は f の標識つき分岐点 (marked critical point) と呼ばれる．さて，c_t が $t=t_0$ においてアクティブであるとは，関数族 $\{t\mapsto f_t^n(c_t)\}_{n\in\mathbf{N}}$ が t_0 のすべての近傍で正規族とならないことをいう．アクティブな c_t を与えるパラメーター全体の集合を，$A(f,c)\subset\mathbb{D}$ で表し，アクティブ部分と呼ぶ．この集合は，いわゆる分岐部分 (bifurcation locus) の部分集合である．

例．典型的なのは，2 次多項式族 $f:(t,z)\mapsto z^2+3t$, $c_t=0$ である．このとき，$A(f,0)$ はマンデルブロー集合 M の境界部分に相当する．

さて以下では，次の定理を証明してみよう：

□ **定理 2.2 (周期的な分岐点の分布)** $A(f,c)$ は空でないとする．このとき，任意の $t_0\in A(f,c)$ に対し，収束列 $t_k\to t_0$ で c_{t_k} が周期的となるものが存在する．とくに，これらの周期は発散する． □

ここで，周期点 c_{t_k} の乗数は 0 である．このような周期点は超吸引的 (superattracting) と呼ばれる．一般に乗数の絶対値が 1 より小さいと，周期点はその近傍を縮小させる作用がある．このような作用は関数を摂動しても変わらないため，c_{t_k} 自体はアクティブではない．この定理によれば，マンデルブロー集合の境界 ∂M は超吸引的周期点をもつ 2 次多項式に対応するパラメータ全体の閉包に含まれることがわかる．

■ **証明** (その 1：旧来の手法を用いて) もし c_{t_0} がいわゆる除外値ならば (すなわち，$\bigcup_{n\geq 0}f_{t_0}^{-n}(c_{t_0})$ が 2 点以下ならば)，この分岐点はすでに超吸引的周期点であり，アクティブでない．よって（必要ならば Puiseau 級数を用いてパラメータの取り方を工夫し），グラフが交わらない正則関数の組 $\{a_t,b_t,c_t\}$ で，$f_t^m(a_t)=f_t^n(b_t)=c_t$ がある $m,n\geq 1$ で成り立つものが存在する．

$\{t\mapsto f_t^n(c_t)\}$ は $t=t_0$ において正規族でないから，Montel の定理より，ある列 $t_k\to t_0$ と $n_k\to\infty$ が存在して，$f_{t_k}^{n_k}(c_{t_k})\in\{a_{t_k},b_{t_k},c_{t_k}\}$ とできる．このとき，c_{t_k} は周期的である．

もし c_{t_k} の周期が有界であれば，無限個の $t=t_k$ について $f_t^p(c_t)=c_t$ となる $p\geq 1$ が存在する．これは c_t が $t=t_0$ でアクティブであることに反する． ■

■ **証明** (その 2：**Zalcman の補題を用いて**) $t_0\in A(f,c)$ と仮定し，Zalcman の補題を $t\mapsto F_n(t):=f_t^n(c_t)$ に適用しよう．補題より，n_k,ρ_k および $t_k\to t_0$ で

$\phi_k(w) := F_{n_k}(t_k + \rho_k w)$ が定数でない有理形関数 $\psi(w)$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する．さらに，

□ **補題 2.3** 任意の $m \geq 0$ について，定数でない有理形関数 $\psi_m : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ で $f_{t_0}^m \circ \psi_m = \psi_0$ を満たすものが存在する． □

■ **証明** $k \gg 0$ のとき $\{w \mapsto F_{n_k - m}(t_k + \rho_k w)\}$ は正規族をなすので，そのような ψ_m が部分列の極限として存在する． ■(補題 2.3)

いま，適当な $m \geq 1$ に対し方程式 $f_{t_0}^m(z) = c_{t_0}$ の解として，少なくとも3つの異なる解 z_0, z_1, z_2 を見つけることができたと仮定してよい．Picardの定理より，この中の少なくともひとつ（z_0 とする）は ψ_m の除外値ではない．したがってある $w_0 \in \mathbb{C}$ が存在して，$f_{t_0}^m \circ \psi_m(w_0) = c_{t_0}$ を満たす．これは方程式 $\psi(w) = c_{t_0}$ が $w = w_0$ において解をもつことと同値である．

さてZalcmanの補題より，方程式 $\phi_k(w) = c_{t_k+\rho_k w}$ すなわち

$$f_{t_k+\rho_k w}^{n_k}(c_{t_k+\rho_k w}) = c_{t_k+\rho_k w}$$

は解 $w_k \to w_0$ $(k \to \infty)$ をもつ．ここで $s_k := t_k + \rho_k w_k$ とおけば，$s_k \to t_0$ かつ c_{s_k} は周期 n_k 以下の周期点である．(c_t が t_0 で正規族でないことから，c_{s_k} の周期は有界でない．） ■

このように，パラメーター空間においてもSchwick的議論が可能なのである．この事実は，次の応用例でも本質的な役割を果たす．

3　M と J の類似性

この章では，補題中の関数族 $\mathcal{F}$ が2次多項式の反復合成 $\{f_c^n\}_{n\in\mathbb{N}}$（ただし c はMandelborot集合の境界上の点）の場合を考える．ただし，補題自体を適用するのではなく，先ほどみたSchwick的議論を活用する，ある意味2次的な応用である．

Mandelbrot 集合と Misiurewicz 点． 2次多項式族

$$\left\{f_c(z) = z^2 + c \,:\, c \in \mathbb{C}\right\}$$

を考えよう．ここでは慣例にしたがって，パラメーターを c で表す．先ほどの標識つき分岐点の記号とは異なるので注意されたい．**Mandelbrot 集合** M は次のように定義される集合であった：

$$M := \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

もし $c \in M$ であれば，f_c のJulia集合は次のように特徴づけることができる：

$$K_c := \{z \in \mathbb{C} : |f_c^n(z)| \leq 2 \ (\forall n \in \mathbb{N})\}$$
$$J_c := J_{f_c} := \partial K_c.$$

前章でコメントしたように，Mandelbrot 集合の境界 ∂M はこの族共通の分岐点 $z=0$ に関するアクティブ部分である．とくに，パラメーター c は $f_c(0)$ であって，分岐値 (critical value) となるように調整されている．

さて $c_0 \in \partial M$ について，次の性質を持つものは **Misiurewicz** 点と呼ばれる：

> 「ある $l, p \in \mathbb{N}_+$ が存在して，$a_0 = f_{c_0}^l(c_0)$ は周期 p の（反発的）周期点となる.」

要するに c_0 が前周期的である場合をいう．括弧つきの（反発的）という部分は 2 次多項式の特殊事情で，$c_0 \in \partial M$ かつ前周期的であれば自動的に満たされる性質である．このことから，c_0 自身は周期的ではないことがわかる．さらに

$$c_0 \;\in\; J_{c_0} \;=\; K_{c_0}$$

がなりたつ．とくに，K_{c_0} は内点をもたない．

Mandelbrot 集合と Julia 集合の類似性. さて以下では，Tan Lei([TL]) による次の定理についておおまかな証明を述べたい：

> **「Tan Lei の定理」** $c_0 \in \partial M$ が Misiurewicz 点の場合，$z = c_0$ のあたりで Julia 集合 J_{c_0} を拡大していくと，$c = c_0$ のあたりで Mandelbrot 集合 M を拡大していったときに見える絵と極めて似たものが得られる.

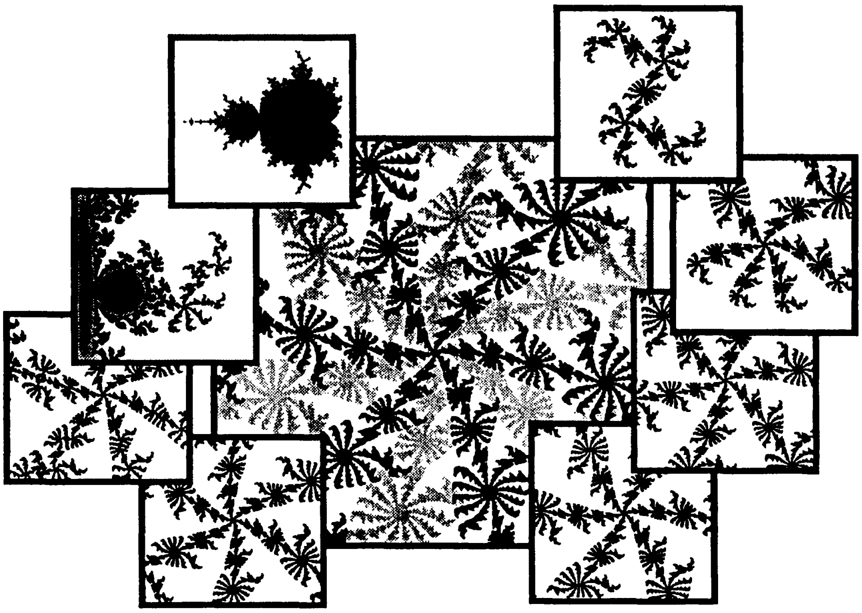

図 2: 中央の絵は，ある Misiurewicz 点 c_0 の周りでマンデルブロー集合（グレー）と Julia 集合 J_{c_0} （黒）を同じ座標系で描いたもの．それぞれの描画領域を広げていくと，一方は Mandelbrot 集合（左 4 枚）に，一方は Julia 集合（右 4 枚）になる．

この「定理」を数学的に正当な主張に直していこう.(もちろん，オリジナルの主張はちゃんと数学的に正当である.) まず古典的な結果として知られる，次の定理([Mi, Cor.8.12]) を用いる：

□ **定理 3.1 (Poincaré 関数の存在定理, Kœnigs)** $\lambda_0 := (f_{c_0}^p)'(a_0)$ とする．このとき，関数列

$$w \quad \longmapsto \quad f_{c_0}^{kp}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_0^k}\right) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

は，有理形関数 $\psi(w)$ で

$$\psi(\lambda_0 w) \;=\; f_{c_0}^p \circ \psi(w)$$

を満たすものに $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する．とくに，$\psi(0) = a_0$, $\psi'(0) = 1$ である. □

定理の主張するところは，$\mathbb{C}$ 上の力学系 $w \mapsto \lambda_0 w$ を $\psi : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ という「レンズ」を通して 眺めることで，反発的周期点 $z = a_0$ 近傍の力学系が得られる，ということである．このような ψ は **Poincaré 関数**と呼ばれる.

さてわれわれが目標とする定理は $z = c_0$ における局所的性質の関する ものであるから，上の結果をそのように言い替えてみよう．$A_0 := (f_{c_0}^l)'(c_0)$ とおくと，$z = c_0$ からの微小変化 Δz について

$$f_{c_0}^l(c_0 + \Delta z) \;=\; a_0 + A_0 \cdot \Delta z + o(\Delta z)$$

がなりたつ. (c_0 が周期点でないことから $A_0 \neq 0$ もわかる.) ここで $\Delta z = w/(A_0\lambda_0^k)$ とすれば，$k \to \infty$ のとき

$$f_{c_0}^{kp}\left(a_0 + \frac{w}{\lambda_0^k}\right) \;\sim\; f_{c_0}^{kp+l}\left(c_0 + \frac{w}{A_0\lambda_0^k} + o(\lambda_0^{-k})\right) \;\sim\; f_{c_0}^{kp+l}\left(c_0 + \frac{w}{A_0\lambda_0^k}\right) \;:=\; \psi_k(w)$$

が $\mathbb{C}$ のコンパクト集合上で成立することがわかる．結果として，$n_k := kp+l$, $z_k := c_0$, $\rho_k := 1/(A_0\lambda_0^k)$ とおけば

$$\psi(w) \;=\; \lim_{k\to 0} \psi_k(w) \;=\; \lim_{k\to 0} f_{c_0}^{n_k}(z_k + \rho_k w)$$

を得る．まさに，Zalcman の補題から生成される関数の形をしている.

Hausdorff 位相. 次に，集合が「似ている」ことを厳密に表現するための設定を行おう．$\mathbb{C}$ 上の（空でない）コンパクト集合全体を $\mathrm{Com}(\mathbb{C})$ で表す．そこでの列 $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ について，K_k が $k \to \infty$ のとき $K \in \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ に収束するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対しある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$k \geq k_0$ のとき $K \subset \mathrm{N}_\epsilon(K_k)$ かつ $K_k \subset \mathrm{N}_\epsilon(K)$ が成り立つこととする．ただし，$\mathrm{N}_\epsilon(\cdot)$ は $\mathbb{C}$ 内での ϵ-開近傍である.

さていま，原点中心半径 $r > 0$ の開円板を $\mathbb{D}_r$ で表そう．閉集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対し，記号 $[K]_r$ で集合 $(K \cap \mathbb{D}_r) \cup \partial\mathbb{D}_r \in \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ を表すことにする．また，$a \in \mathbb{C}^*$ および $b \in \mathbb{C}$ に対し，記号 $a(K - b)$ で集合 $\{a(z-b) : z \in K\} \in \mathrm{Com}(\mathbb{C})$ を表すことにする.

以上で，定理を述べる準備が整った.

□ **定理 3.2 (Tan Lei [TL] 改)** 上記の設定で，$\mathcal{J} := \psi^{-1}(J) \subset \mathbb{C}$ とする．このとき，ある複素定数 $q \neq 0$ が存在し，任意に大きな $r > 0$ について次が *Hausdorff* 位相の意味で成り立つ：

(a) $\left[\rho_k^{-1}(J_{c_0} - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$

(b) $\left[q\rho_k^{-1}(M - c_0)\right]_r \to [\mathcal{J}]_r \quad (k \to \infty)$ □

証明の鍵となるのは，次の補題である：

□ **補題 3.3** $c_0 \in \partial M$ を *Misiurewicz* とするとき，ある複素定数 $\lambda \neq 0$ が存在して，関数列

$$\Phi_k(w) \;:=\; f^{n_k}_{c_0+\lambda\rho_k w}(c_0 + \lambda\rho_k w)$$

は *Poincaré* 関数 $\psi(w)$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束する． □

ここで，実際は $\lambda = q^{-1}$ である．この補題を認めて，定理の証明をしてみよう．

■ **(a) の証明．** $f^n_{c_0}(J_{c_0}) = J_{c_0}$ であるから，$\left[\rho_k^{-1}(J_{c_0} - c_0)\right]_r = \left[\psi_k^{-1}(J_{c_0})\right]_r$ を得る．定義 $[\mathcal{J}]_r = [\psi^{-1}(J_{c_0})]_r$ および $\psi_k \to \psi$ の $\mathbb{C}$ におけるコンパクト一様収束性から，主張が得られる． ■

■ **(b) の証明．** $\mathcal{M}_k := q\rho_k^{-1}(M - c_0)$ とおく．定義どおりに，任意に小さい $\epsilon > 0$ に対し $k \to \infty$ のとき

$$[\mathcal{M}_k]_r \;\subset\; \mathrm{N}_\epsilon([\mathcal{J}]_r) \quad \text{かつ} \quad [\mathcal{J}]_r \;\subset\; \mathrm{N}_\epsilon([\mathcal{M}_k]_r)$$

を示そう．

まず集合 $\overline{\mathbb{D}}_r - \mathrm{N}_\epsilon(\mathcal{J})$ はコンパクトであるから，ある自然数 $N = N(\epsilon)$ が存在して $|f^N_{c_0} \circ \psi(w)| > 2$ がすべての $w \in \overline{\mathbb{D}}_r - \mathrm{N}_\epsilon(\mathcal{J})$ で成り立つようにできる．$\Phi_k(w)$ が $\psi(w)$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束することから (補題 3.3)，

$$|f^{N+n_k}_{c_0+\lambda\rho_k w}(c_0 + \lambda\rho_k w)| \;>\; 2$$

が $k \gg 0$ で成り立つ．これは $c_0 + \lambda\rho_k w \notin M$ を意味する．言い換えれば，$w \notin \mathcal{M}_k$ ということである．したがって，最初の包含関係 $[\mathcal{M}_k]_r \subset \mathrm{N}_\epsilon([\mathcal{J}]_r)$. が得られた．

次に，$[\mathcal{J}]_r$ を有限集合 $E \subset [\mathcal{J}]_r$ で近似し，E の $\epsilon/2$-近傍が $[\mathcal{J}]_r$ を含むようにできる．したがって，任意の $w_0 \in E$ について，列 $w_k \in [\mathcal{M}_k]_r$ を見つけてきて，$|w_0 - w_k| < \epsilon/2$ が $k \gg 0$ のとき成り立つようにできればよい．

Δ を w_0 中心半径 $\epsilon/2$ の円板とする．もし $\Delta \cap \partial\mathbb{D}_r \neq \emptyset$ であれば，w_k として $\partial\mathbb{D}_r$ の点をとればよい．したがって，$\Delta \subset \mathbb{D}_r$ の場合を考えよう．

いま $\psi(w_0) \in J_{c_0}$ かつ J_{c_0} 内で反発的周期点は稠密なので，適当な w_0' で $|w_0 - w_0'| < \epsilon/4$ かつ $\psi(w_0')$ が周期 m の反発的周期点となるものがとれる．すなわち，関数 $\chi : w \mapsto f^m_{c_0}(\psi(w)) - \psi(w)$ は $w = w_0'$ において零点をもつ．そこで関数

$\chi_k : w \mapsto f^m_{c_0+\lambda\rho_k w}(\Phi_k(w)) - \Phi_k(w)$ を考えよう．Φ_k は ψ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束するから，χ_k は $k \gg 0$ のとき $|w_k - w_0'| < \epsilon/4$ を満たすある $w_k \in \Delta$ で零点をもつ．とくに，$c_k := c_0 + \lambda\rho_k w_k$ は $f^{n_k+m}_{c_k}(c_k) = f^{n_k}_{c_k}(c_k)$ を満たす．すなわち $c_k \in M$ である．よって期待通り，$|w_k - w_0| < \epsilon/2$ を満たす $w_k \in \mathcal{M}_k$ が得られた． ■

以上の議論の核心は，うえの補題 3.3 にある．実は c_0 が半双曲 (semi-hyperbolic) と呼ばれる Misiurewicz よりも広いクラスで，同様の補題が成立し，Mandelbrot 集合と Julia 集合の類似性も証明できる．(結果自体は Rivera-Letelier[RL] によって知られているが，証明は全く異なる.) この場合 c_0 の軌道は反発的周期点 a_0 に着地するかわりに，一様な反発性をもつコンパクト不変集合（いわゆる双曲集合）に着地する点が異なるだけである．

4 Lyubich-Minsky ラミネーションの構成

最後に，この章では Lyubich-Minsky ラミネーションを Zalcman の補題から構成する方法を紹介する．その前に，複素力学系における Lyubich-Minsky 理論の背景を概説しておこう．

複素力学系を研究するうえでのひとつの指針として，**Sullivan の辞書**というものがある．80 年代，D. Sullivan が提唱したこの「辞書」は，古典的な正則力学系のひとつである Klein 群論と複素力学系との類似性に着目し，方法論を共有すべし，というひとつドグマを掲げたものである．(そこでの成功は，たとえば [UTM] に詳しい.)

Klein 群 Γ とは，リーマン球面 $\overline{\mathbb{C}}$ に Möbius 変換群として作用する $PSL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群のことである．一方，$PSL(2,\mathbb{C})$ は 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ に等長変換群として作用するため，商空間 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は 3 次元双曲的多様体（一般には軌道体）となる．すなわち，Klein 群論とは 3 次元双曲多様体論なのである．

一方，複素力学系の作用は $\mathbb{H}^3$ への性質のよい拡張ができないことが知られており，その意味で Klein 群のような「双曲幾何的実現」として自明なものをもたない．そこで 90 年代に登場したのが，M. Lyuibich と Y. Minsky によるラミネーション理論 [LM] である．彼らは複素力学系に対し，「双曲幾何的実現」として **3 次元双曲ラミネーション**が取れることを主張し，さらにその幾何学的剛性から半双曲な有理関数の力学系に関する剛性定理を証明した．

この 3 次元双曲ラミネーションは，局所的には（3 次元球体）×（Cantor 集合）という形状であり，そのパッチワークとして得られる位相空間である．ただしその貼り合わせ方は非常に複雑で，大局的には，非可算個の 3 次元双曲多様体がお互い窮屈に折りたたまれあって，それぞれが全体の稠密集合をなす，といった具合である．その構成方法もたいへん抽象的で難解なのだが，実は Zalcman の補題のアイディアを経由すると，比較的すんなりと書き下すことができる．

4.1 Zalcman 関数

$f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ を次数 2 以上の有理関数とし，写像族 $\mathcal{F}:=\{f^n\}$ に補題を適用して得られる関数族を考えたい．Julia 集合 $J=J_f$ の元 z_0 に対し，Zalcman の補題のようにして得られる極限関数 ψ を f の z_0 における **Zalcman 関数**と呼ぶ（Steinmetz [St]）．またその全体を $\mathcal{Z}(z_0)=\mathcal{Z}_f(z_0)$ で表す．

もし J が無限遠点を含むとき，$\mathcal{Z}(\infty)$ は $\mathcal{Z}(\infty):=\{1/\phi:\phi\in\mathcal{Z}_F(0)\}$ と定義する．ただし，F は $F(z)=1/f(1/z)$ として得られる有理関数である．さらに f の Zalcman 関数の全体 $\mathcal{Z}$ を

$$\mathcal{Z}\;=\;\mathcal{Z}_f\;:=\;\bigcup_{z_0\in J}\mathcal{Z}(z_0)$$

と定義する．この関数族は，次の性質を満たす：

□ **命題 4.1** *1.* $\psi\in\mathcal{Z}$ ならば，$f\circ\psi\in\mathcal{Z}$．また，ある $\psi_1\in\mathcal{Z}$ が存在して，$\psi=f\circ\psi_1$．

2. $\delta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を複素アファイン写像とする．このとき，$\psi\in\mathcal{Z}$ ならば $\psi\circ\delta\in\mathcal{Z}$．

□

この命題を少し大きな枠組みで見てみよう．$\mathbb{C}$ 全体で定義された，定数でない有理形関数全体を $\mathcal{U}$ と表す．また，複素アファイン写像全体を Aff であらわす．一般に $\psi\in\mathbb{C}$ のとき，$f\circ\psi\in\mathcal{U}$ および $\psi\circ\mathrm{Aff}\in\mathcal{U}$ であるから，$f\circ\mathcal{U}\subset\mathcal{U}$ かつ $\mathcal{U}\circ\mathrm{Aff}\;=\;\mathcal{U}$ が成り立つ．

ここで命題が主張するのは，$\mathcal{U}$ の部分集合である $\mathcal{Z}$ が，左からの f の合成について $f\circ\mathcal{Z}=\mathcal{Z}$ を，右からのアファイン写像の合成について $\mathcal{Z}\circ\mathrm{Aff}\;=\;\mathcal{Z}$ を満たす，ということである．

4.2 ラミネーションの構成.

以下では Lyubich-Minsky ラミネーションの構成を見ていこう．オリジナルの構成 [LM] からはかなり簡略化してあるが，最終的に得られるものは同じである．

Lyubich-Minsky 関数. 無限積 $\overline{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$ 内の列 $\hat{z}\;=\;(z_0,z_{-1},z_{-2}\cdots)$ が f の後方軌道 (backward orbit) であるとは，$f(z_{-n})\;=\;z_{-n+1}$ をみたす場合をいう．$\psi\in\mathcal{U}$ が $\hat{z}$ の **Lyubich-Minsky 関数** (もしくは簡単に **LM 関数**) であるとは，適当な列 $\{n_k\}\subset\{n\}$，$\rho_k\in\mathbb{C}^*$ で $\rho_k\to 0$ を満たすもの，球面の回転 $T_k:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ で $T_k(0)=z_{-n_k}$ を満たすものが存在して，

$$\psi_k(w)\;:=\;f^{n_k}\circ T_k(\rho_k w)$$

が $\psi(w)$ に $\mathbb{C}$ 上コンパクト一様収束することを言う．このようにして得られる LM 関数全体からなる集合を $\mathcal{LM}=\mathcal{LM}_f$ と表す．このとき，次がチェックできる：

□ 命題 4.2 LM関数の集合 $\mathcal{LM}$ は，$\mathcal{Z}$ の部分集合である．また，$f \circ \mathcal{LM} = \mathcal{LM}$ および $\mathcal{LM} \circ \mathrm{Aff} = \mathcal{LM}$ を満たす． □

Lyubich-Minsky ラミネーションの構成． $\widehat{\mathcal{U}} := \mathcal{U}^{\mathbb{N}}$ とおく．ψ_0 を $\mathcal{LM}$ の元とするとき，

$$\hat{\psi} := (\psi_0, \psi_{-1}, \ldots) \in \widehat{\mathcal{U}}$$

で $f \circ \psi_{-n} = \psi_{-n+1} \in \mathcal{LM}$ を満たすものを考えることができる．(ここで $f \circ \mathcal{LM} = \mathcal{LM}$ という性質を使っている．) また，$\widehat{\mathcal{LM}}$ でそのような $\widehat{\mathcal{U}}$ の元 $\hat{\psi}$ 全体を表す．$\hat{\psi}$ の各項について，$w = 0$ での値をとれば，後方軌道 $\hat{z} = (z_{-n})$ で $\psi_{-n}(0) = z_{-n}$ を満たすものが得られることに注意しよう．

一方，次のような同値関係を入れる：$\mathcal{U}$ の二つの元 ϕ, ψ が $\mathbb{C}^*$-同値であるとは，ある定数 $a \in \mathbb{C}^*$ が存在して，$\phi(w) = \psi(aw)$ がすべての $w \in \mathbb{C}$ で成り立つときをいう．また，$\widehat{\mathcal{U}}$ の二つの元 $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ が $\mathbb{C}^*$-同値であるとは，ある n によらない定数 $a \in \mathbb{C}^*$ が存在して，$\phi_{-n}(w) = \psi_{-n}(aw)$ がすべての $n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$ で成り立つときをいう．

これら $\mathbb{C}^*$-同値による $\mathcal{U}$ および $\widehat{\mathcal{U}}$ の商空間を $\mathcal{U}/\mathbb{C}^*$ および $\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$ で表す．$\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$ における $\widehat{\mathcal{LM}}/\mathbb{C}^*$ の閉包を $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$ で表し，これを **Lyubich-Minsky のアファイン・ラミネーション**（もしくは簡単に，**LM-ラミネーション**）と呼ぶ．実際 Lyubich と Minsky は $\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$ が $\mathbb{C}$ を普遍被覆にもつような軌道体による葉層をなすことが示し，さらに $\mathcal{A}$ が同様な葉からなるラミネーションであることを示した [LM, §7]．このRiemann 面ラミネーションをもとに，スケーリング束と呼ばれるある種のファイバー束を考えることで 3 次元双曲ラミネーションが得られるのだが，本稿ではこれ以上深入りしないでおこう．

さて実は，彼らのラミネーションの構成方法は十分な普遍性を持っている．一般に，$\mathcal{U}$ の部分集合 $\mathcal{K}$ が $f \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$ および $\mathcal{K} \circ \mathrm{Aff} = \mathcal{K}$ を満たすとき，同様のレシピにより $\mathcal{A}$ と同じタイプの葉をもつ Riemann 面ラミネーション $\mathcal{KA}$ が得られることがわかる．もちろん，このような $\mathcal{K}$ であれば何でも良いというわけではない．たとえば $\mathcal{K} = \mathcal{LM}$ の場合，Lyubich と Minsky は，f が半双曲的なとき，またそのときに限り $\mathcal{A} = \mathcal{LMA}$ が局所コンパクトになることを証明し，さらにその性質を彼らの剛性定理証明の際に活用している．原材料である $\mathcal{U}$ が局所コンパクトでないことを考えると，こうした性質は非自明なことがわかるだろう．

4.3 Zalcman ラミネーションは Lyubich-Minsky ラミネーションか？

Zalcman ラミネーション． 命題 4.1 より，$\mathcal{K} = \mathcal{Z}$ とすることでやはりラミネーションが得られる．これを $\mathcal{ZA} = \mathcal{ZA}_f$ で表し，**Zalcman のアファイン・ラミネーション**（もしくは簡単に，**Z-ラミネーション**）と呼ぶ．先の命題より $\mathcal{LM} \subset \mathcal{Z}$ であったから，ラミネーションとしても $\mathcal{A} \subset \mathcal{ZA}$ が得られる．この包含関係は，どの程度強いものだろうか？ここでは $\mathcal{Z} = \mathcal{LM}$，したがって $\mathcal{ZA} = \mathcal{A}$ となる十分条件を

与えてみよう．言い換えれば，「Zalcman の補題が Lyubich-Minsky ラミネーションの別構成を与えるための十分条件」である．

単葉全軌道． $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ に対し，**全軌道** (grand orbit) $GO(z_0)$ とは，ある $m, n \in \mathbb{N}$ が存在して $f^m(z_0) = f^n(\zeta)$ とできるような $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$ の全体である．その中でも，$(f^m)'(z_0) \neq 0$ かつ $(f^n)'(\zeta) \neq 0$ とできるような ζ 全体を**単葉全軌道** (univalent grand orbit) と呼び，$UGO(z_0)$ と表す．

また，$P = P_f$ で f の分岐後集合 (post critical set) $\overline{\{f^n(c) : n \in \mathbb{N}_+, f'(c) = 0\}}$ を表す．

□ **定理 4.3 (ラミネーションの一致)** *f が次を満たすとき，$\mathcal{Z}$ と $\mathcal{LM}$ は一致する:*

> *(∗) 任意の $z_0 \in J$ に対し，$z_0' \in UGO(z_0) - \{z_0\}$ かつ $z_0 \notin P$ となるものが存在する．*

とくに，Z-ラミネーション $\mathcal{ZA}$ と LM-ラミネーション $\mathcal{A}$ は一致する． □

たとえば，双曲的な有理写像は (∗) を満たす．もうすこし一般に，放物的な（i.e. J が分岐点をもたない）有理写像であれば良い．一方，(∗) が成り立たない例として $f(z) = z^2 - 2$ における $z_0 = 2$ などがある．

定理の証明は，次のふたつの命題から自然に得られる．

□ **命題 4.4** *任意の $z_0 \in J$ および $\zeta_0 \in UGO(z_0)$ に対し，$\mathcal{Z}(z_0) = \mathcal{Z}(\zeta_0)$．* □

□ **命題 4.5** *任意の $\zeta_0 \in J - P$ に対し，$\mathcal{Z}(\zeta_0)$ は $\mathcal{LM}$ の部分集合．* □

しかし，次の問題は未解決である：

□ **問題．** $\mathcal{Z} = \mathcal{LM}$ もしくは $\mathcal{ZA} = \mathcal{A}$ となる f の必要十分条件を与えよ． □

Steinmetz の問題． Steinmetz は [St] で，「与えられた f について，集合 $\{\zeta \in J : \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\zeta)\}$ を決定せよ」という問題を掲げている．上の定理 4.3 の証明から得られる系として，次のような結果が得られる：

□ **定理 4.6** *f が 定理 4.3 の (∗) をみたすとき，$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\zeta)$ がすべての $\zeta \in J$ で成り立つ．* □

すなわち，この場合 $J = \{\zeta \in J : \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\zeta)\}$ となるわけである．

5 錐点について

Klein 群の世界では，その正則力学系としてのカオス部分を極限集合と呼ぶ．その中でも，たとえば反発的固定点のように，一定の拡大性をもつ点を "conical" と形容することがある．これに対応して，複素力学系にも "conical" を定義するさまざまな流儀がある．(そのあたりは [Pr] に詳しい．) ここでは Lyubich と Minsky による定

義 [LM]，および Martin と Mayer による定義 [MM] に着目し，Zalcman のリスケーリング原理にしたがって橋渡しを試みる．

本稿では，以下便宜的に conical を錘的と表すことにする．

ラミネーション上の力学系． まずは Lyubich-Minsky の錘点を定義してみよう．まず，写像 $\hat{f}:\widehat{\mathcal{U}}\to\widehat{\mathcal{U}}$ を $\hat{f}:(\psi_{-n})\mapsto(f\circ\psi_{-n})$ として定義する．この $\hat{f}$ の作用は $\mathcal{U}$ における $\mathbb{C}^*$-同値性を保存するので，結局 $\hat{f}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ および $\hat{f}:\mathcal{ZA}\to\mathcal{ZA}$ にも自然に作用することがわかる．ここでは $\hat{f}:\mathcal{ZA}\to\mathcal{ZA}$ のほうに着目し，そこで錘点を定義する．

任意の $[\hat{\psi}]\in\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*$ について，その代表元を $\hat{\psi}=(\psi_0,\psi_{-1},\ldots)\in\widehat{\mathcal{U}}$ とすれば，$\psi_0(0)$ の値は代表元の取り方に依存しない．したがって，写像 $\hat{\pi}:\widehat{\mathcal{U}}/\mathbb{C}^*\to\overline{\mathbb{C}}$ を $\hat{\pi}([\hat{\psi}]):=\psi_0(0)$ により定義し，これを射影と呼ぶことにする．

さて以下が，Lyubich と Minsky による錘点の定義 ([LM, §8]) である:

□ **定義** **(Lyubich-Minsky の錘点)** Julia 集合上の点 z_0 が錘的であるとは $\hat{\pi}(\tilde{z})=z_0$ をみたす $\tilde{z}\in\mathcal{ZA}$ で，前方軌道 $\{\tilde{z},\hat{f}\tilde{z},\hat{f}^2\tilde{z},\ldots\}$ が $\mathcal{ZA}$ 内に集積点をもつときをいう． □

錘的な点を簡単に，錘点 (conical point) と呼ぶことにしよう．また，あとで定義する Martin-Mayer の錘点と区別するために，上の意味での錘点は **LM-錘的** (LM-conical) と呼ぶことにし，さらにその全体を Λ_{LM} で表す．

集合 Λ_{LM} の性質の中でも，次のものは特筆すべきであろう:

□ **定理 5.1 (Lyubich-Minsky, NILF on Λ_{LM})** もし有理写像 f の Λ_{LM} が不変線分場を持てば，それは *Lattès* 写像に限る． □

Lattès 写像とは，トーラス上の被覆写像を，トーラスから球面への 2 対 1 の分岐被覆を通して眺めることで得られる非常に特殊な有理写像である．不変線分場をもたない (No Invariant Line Field) という性質は，その上で力学系の擬等角変形ができない，ということを示している．このような性質は，力学系の剛性やパラメーター空間の構造を考える上で重要な要素なのである．

具体例を挙げておくと，半双曲的 (semi-hyperbolic) な有理写像に関しては，つねに $J=\Lambda_{LM}$ が成り立つ．この場合，上の定理は Julia 集合上での力学系の変形不可能性をいっているわけである．

さらに LM-錘点は，次のように特徴付けられる：

□ **定理 5.2 (LM-錘性のいいかえ)** 任意の $z_0\in J$ に対し，以下が成り立つ：

(LM1) ある $\psi\in\mathcal{Z}(z_0)$ で，

$$\psi(w) \;=\; \lim_{k\to\infty}\psi_k(w) \;:=\; \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(z_0+\rho_k w)$$

を満たすものが存在する．ただし，収束は $\mathbb{C}$ 上でコンパクト一様収束．

(LM2) z_0 は *LM*-錘的.

(LM3) 任意の $\tilde{z} \in \mathcal{ZA}$ で $\hat{\pi}(\tilde{z}) = z_0$ を満たすものについて，その前方軌道 $\{\tilde{z}, \hat{f}\tilde{z}, \hat{f}^2\tilde{z}, \ldots\}$ は $\mathcal{ZA}$ 内に集積点をもつ.

もし $z_0 = \infty$ の場合は，適当に *Möbius* 共役をとることで (LM1) は正当化される. □

Haïssinsky-Martin-Mayer の NILF 定理. Lyubich と Minsky の定理を改良した結果はいくつかあるが，その中でも Haïssinsky [Ha] および, Martin と Mayer [MM] によって得られた NILF 定理は Zalcman の補題との関係が深い. 以下では [MM] にしたがって，もうひとつの錘点を定義しよう.（この定義に使われる条件の重要性は, Astala-Haïssinsky [Ha] や Steinmetz [St] でも認知されている.）

□ **定義 (Martin-Mayer の錘点)** Julia 集合上の点 $z_0 \neq \infty$ が MM-錘的 (MM-conical) であるとは，ある列 $n_k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in \mathbb{C}^*$ で $\rho_k \to 0$ を満たすものが存在して，$\psi_k(w) = f^{n_k}(z_0 + \rho_k w)$ が定数でない有理形関数 $\psi : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ に $\mathbb{D}$ 上でコンパクト一様収束するときを言う. □

もし $z_0 = \infty$ の場合は，有理写像 $F(w) = 1/f(1/w)$ について 0 が錘的であるときこれを MM-錘的と呼ぶ. これは条件 (LM1) を弱めたもので，極限 $\psi = \lim \psi_k$ の定義域が $\mathbb{C}$ でなく，単位円板 $\mathbb{D}$ となっている点が異なっている. また MM-錘点に関しては，次の力学系的な特徴づけが知られている：

□ **命題 5.3 ([Ha, MM])** $z_0 \in J$ について，次は同値：

(MM0) ある $d \in \mathbb{N}$ および $r > 0$ が存在して，$D_n := \mathbb{B}(f^n(z), r)$ および z_0 を含む $f^{-n}(D_n)$ の連結成分 D'_n は無限個の $n \in \mathbb{N}$ について $\deg(f^n : D'_n \to D_n) \leq d$ をみたす.

(MM1) z_0 は *MM*-錘的. □

ここで，$\mathbb{B}(x, r)$ とは x を中心とする半径 r の球面上の円板である. また (MM1) は明らかに (LM1) よりも弱い条件なので，

□ **命題 5.4** $\Lambda_{LM} \subset \Lambda_{MM}$. □

を得る.（「(LM2) ならば (MM0)」という条件はすでに [LM, Prop.8.7] において指摘されている.）

さて定理 5.1 を改良したのが，次のものである ([Ha, Prop. 5.2] and [MM, Thm.1.2]):

□ **定理 5.5 (Haïssinsky, Martin-Mayer)** もし有理写像 f の Λ_{MM} が不変線分場を持てば，それは *Lattès* 写像に限る. □

Zalcman 芽空間による定式化. さて以下では Z-ラミネーションの定義を緩めることで，LM-錘点と MM-錘点の橋渡しを行う．ここで用いる芽位相 (germ topology) のアイディアは，[KL] を基にしている．また，[BS] にも近いアイディアが用いられている．

$\mathcal{V}$ を原点のある近傍で定義された定数でない有理形関数全体の空間とする．ここで元 $\psi \in \mathcal{V}$ は原点における芽 (germ) とみなし, 実際にどの領域まで定義可能かは気にしないことにする.（もちろんその中には，たとえば $\mathbb{C}$ を多重に覆う Riemann 面にまで解析接続可能なものも含まれるであろう.）列 $\psi_n \in \mathcal{V}$ が $\psi \in \mathcal{V}$ に収束するとは，ある原点中心の円板 D が存在して，$\psi|_D$ が $\psi_n|_D$ $n \gg 0$ のときともに定義され，かつその上で ψ_n が ψ に D 上で一様収束するときをいう.

f を有理関数とするとき，任意の $a \in \mathbb{C}^*$ および $\psi \in \mathcal{V}$ に対して $f \circ \psi(w) \in \mathcal{V}$ および $\psi(aw) \in \mathcal{V}$ が成り立つことは明らかである．よって作用 $f\circ : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ および商空間 $\mathcal{V}/\mathbb{C}^*$ が意味をもつ. $\mathcal{U}/\mathbb{C}^*$ の位相が $\mathbb{C}$ でのコンパクト一様収束であったことと比較すると，$\mathcal{V}/\mathbb{C}^*$ は定義域も $\mathbb{C}^*$ 分のリスケーリングによってかなり柔軟に変化するので，ある意味扱いやすいわけである．そこで，$\mathcal{Z}$ を $\mathcal{V}$ の元とみなし，**Zalcman 芽空間** $\mathcal{ZG}$ を $\mathcal{Z}/\mathbb{C}^*$ の $\mathcal{V}/\mathbb{C}^*$ における閉包として定義する．[2]

以上のセッティングにより，次がわかる：

□ **定理 5.6 (MM-錘性のいいかえ)** $z_0 \in J$ について，以下は同値：

(MM1) z_0 は *MM*-錘的.

(MM2) ある $\tilde{z} = [\psi] \in \mathcal{ZG}$ で $\psi(0) = z$ を満たすものが存在し，その前方軌道 $\{\tilde{z}, \hat{f}\tilde{z}, \hat{f}^2\tilde{z}, \ldots\}$ は $\mathcal{ZG}$ 内に集積点をもつ.

(MM3) 任意の $\tilde{z} = [\psi] \in \mathcal{ZG}$ で $\psi(0) = z$ を満たすものについて，その前方軌道 $\{\tilde{z}, \hat{f}\tilde{z}, \hat{f}^2\tilde{z}, \ldots\}$ は $\mathcal{ZG}$ 内に集積点をもつ. □

定理 5.2 における (LMi) と，上の (MMi) ($i = 1, 2, 3$) が完全に対応することに注目されたい．これらは本質的には定義域が違う（$\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$）だけで，その原理的な部分はまったく同じなのである．実際，定理 5.6 は定理 5.2 とまったく同じ議論によって証明できる．さらに，剛性に関する定理 5.5 も，芽空間の言葉を用いることで Lyubich と Minsky による定理 5.1 ([LM, Proposition 8.9]) の証明とほぼ同じスタイルで書き直すことができる.

□ **問題.** (MM0) に対応する条件 (LM0) はなにか？すなわち，LM-錘点の力学系的な特徴づけを与えよ. □

[2]もちろん，$\mathcal{V}^{\mathbb{N}}/\mathbb{C}^*$ を考えてそこで芽の空間を考えることもできる．この場合も，定理 5.6 と同じ主張が得られる.

参考文献

[Ba] D. Bargmann. Simple proofs of some fundamental properties of the Julia sets. *Ergodic Th. Dynam. Systems.* **19**(1999), 553–558.

[BS] E. Bedford and J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. VIII. Quasi-expansion. *Amer. J. Math.* **124**(2002), 221–271.

[BD] F. Berteloot and J. Duval. Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia. *Progress in Mathematics.* **188**(2000), 221–222.

[BM] F. Berteloot and V.Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe.* Cours Spécialisés, 7. Société Mathématique de France, 2001.

[Ha] P. Haïssinsky. Rigidity and expansion for rational maps. *J. London Math. Soc.* (2), **63**(2001), 128 – 140.

[KL] V.A. Kaimanovich and M. Lyubich. Conformal and harmonic measures on laminations associated with rational maps. *Mem. Am. Math. Soc.* **820**, 2005.

[Ka] T. Kawahira. Trois applications du lemme de Zalcman aux dynamiques complexes. *Preprint*, 2009.

[LM] M. Lyubich and Y. Minsky. Laminations in holomorphic dynamics. *J. Diff. Geom.* **49**(1997), 17 – 94.

[Mcl] C.T. McMullen. *Renormalization and complex dynamics.* Ann. of Math. Studies **135**, Princeton University Press, 1994.

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. (3rd edition).* Ann. of Math. Studies **160**, Princeton University Press, 2006.

[MM] G.J. Martin and V. Mayer. Rigidity in holomorphic dynamics and quasiregular dynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**(2003) No. 11, 4349 – 4363.

[No] 野口 潤次郎. 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似. 共立出版, 2003.

[Pr] F. Przytycki. Conical limit set and Poincaré exponent for iterations of ratiomal maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* **351**(1999) No.5, 2081 – 2099.

[RL] J.E. Rivera-Letelier. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Fund. Math.* **170**(2001) 287 – 317.

[Sch] N. Schwick. Repelling periodic points in the Julia set. *Bull. London Math. Soc.* **29**(1997), no. 3, 314–316 .

[St] N. Steinmetz. Zalcman functions and rational dynamics. *New Zealand J. Math.* **32**(2003), no. 1, 91–104.

[TL] Tan L. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Comm. Math. Phys.* **134**(1990), 587 – 617

[UTM] 上田 哲生・谷口 雅彦・諸澤 俊介. 複素力学系序説. 培風館 , 1995.

[Za] L. Zalcman. A heuristic principle in function theory. *Amer. Math. Monthly.* **82**(1975), 813 – 817.